הרצאה 7, 14.05.26

משפט 5: (מבחן האינטגרל) יהי $0 \le K \in \mathbb{Z}$ ותהי f פונק' המוגדרת ב- $[K,\infty)$. נניח כי

(i) f יורדת.

(ii) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

אז הטור $\sum_{n=K}^{\infty} f(n) < \infty$ אם"מ $\int_K^{\infty} f(x)dx < \infty$,

ובנוסף

$$\int_K^{\infty} f(x)dx \le \sum_{n=K}^{\infty} f(n) \le f(K) + \int_K^{\infty} f(x)dx$$

טענת עזר 1: יהי $0 \le K \in \mathbb{Z}$ ותהי f פונק' המוגדרת ב- $[K,\infty)$. נניח כי

(i) f יורדת.

(ii) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

אז לכל $n \ge K$ מתקיים

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$$

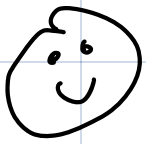
<u>הוכחת טענת העזר:</u> יהי $n \geq K$. מהיות

f יורדת, לכל $x \in [n, n+1]$ מתקיים

$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$. לכן ממונוטוניות

האינטגרל המסוים,

$$f(n+1) = \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx \underset{c\cdot(b-a)}{=} f(n)$$



<u>הוכחת משפט 5:</u> המשיות מהיות f יורדת,

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \inf\{f(x) : x \geq K\}$ ומהגבלתה

ש- $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ נקבל $\inf\{f(x) : x \geq K\} = 0$

ולכן $f(x) \geq 0$ לכל $x \geq K$. לכן

תסם מלמטה

הסדרות $\sum_{n=K}^{\infty} f(n) < \infty$, $\int_K^{\infty} f(x)\,dx < \infty$ מתכנסות

היטב.

$\Leftarrow$: הנשיית מניח כי $\sum_{n=k}^{\infty} f(n) < \infty$. אזי

קיים $S \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$S = \sum_{n=k}^{\infty} f(n)$$

נבנה פונקציה המוגדרת ע"י

$$F(x) = \int_k^x f(t)\,dt \quad , \quad \forall x \geq k$$

מהנחת f ינרדת ב- $[k,x]$ אם $x>k$, f

אינטגרביליות ב- $[k,x]$ אם $x>k$ ולכן F

מוגדרת היטב אם $x>k$. בנוסף

$$F(k) = \int_k^k f(t)\,dt = 0$$

ולכן F מוגדרת היטב. בנוסף נשים לב כי

אם $k \leq x_1 < x_2$,

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_k^{x_2} f(t)\,dt - \int_k^{x_1} f(t)\,dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \geq 0$$

אם $f(x) \geq 0$

ולכן $F(x_1) \leq F(x_2)$ אם $k \leq x_1 < x_2$,

ולכן F עולה. עתה נוכיח כי F חסומה מלעל.

יהי $x \geq K$. נסמן $N = \lceil x \rceil$. אז

$$\underset{\text{עולה}}{F(x) \leq} F(N) = \int_K^N f(t)\,dt = \int_K^{K+1} f(t)\,dt + \dots + \int_{N-1}^{N} f(t)\,dt$$

$$\underset{\text{לפי 1}}{\leq} f(K) + \dots + f(N-1) = \sum_{n=K}^{N-1} f(n)$$

$$\leq \sup\left\{\sum_{n=K}^{N} f(n) : N \geq K\right\} \underset{\text{לפי אי"ש}}{=} \sum_{n=K}^{\infty} f(n) = S$$

אז F עולה וחסומה מלעל ע"י S. אז

$\int_K^\infty f(x)\,dx < \infty$ ובנוסף

$$\int_K^\infty f(x)\,dx \underset{\text{הגדרה}}{=} \lim_{x\to\infty} \int_K^x f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty} F(x)$$

$$\underset{\text{עולה}}{=} \sup\{F(x) : x \geq K\} \underset{\text{מינימליות}}{\leq} S = \sum_{n=K}^{\infty} f(n)$$

$\Leftarrow$: עתה נניח כי $\int_K^\infty f(x)\,dx < \infty$ אזי

קיים $S \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$S = \int_K^\infty f(x)\,dx$$

נב"ל בסדרת הסכומים החלקיים $(S_N)_{N=K}^\infty$

של הטור, שמוגדרת בסדרה המוגדרת ע"י:

$$S_N = \sum_{n=K}^{N} f(n) \quad , \quad \forall N \geq K.$$

מהגדרת הטור $\sum_{n=K}^{\infty} f(n)$ אז יש כדי ש- $(S_N)_{N=K}^\infty$

עולה. נוכיח שהיא חסומה מלעל. יהי $N \geq K$.

אזי

$$S_N = \sum_{n=K}^{N} f(n) = f(K) + f(K+1) + \dots + f(N)$$

$$\underset{\text{לפי 1}}{\leq} f(K) + \int_K^{K+1} f(t)\,dt + \dots + \int_{N-1}^{N} f(t)\,dt$$

$$= f(K) + \int_K^N f(t)\,dt = f(K) + F(N)$$

$$\leq f(k) + \sup\{F(x) : x \geq k\} = f(k) + \int_k^\infty f(x)\,dx$$

$$= f(k) + S$$

סכום $(S_N)_{N=k}^\infty$ עולה ומוסמך מלעל ע"י

$f(k)+S$. סכום הטור $\sum_{n=k}^\infty f(n) < \infty$ ובנוסף

$$\sum_{n=k}^\infty f(n) \underset{\text{הסדרה}}{=} \lim_{N\to\infty} S_N \underset{\text{עולה}}{=} \sup\{S_N : N \geq k\} \underset{\text{מינימלית}}{\leq} f(k) + S$$

$$= f(k) + \int_k^\infty f(x)\,dx$$

הגדרה: יהי $0 \leq k \in \mathbb{Z}$ ויהי $(a_n)_{n=k}^\infty$ סדרה של מס' ממשיים. נאמר שהטור $\sum_{n=k}^\infty a_n$ מתכנס בהחלט אם $\sum_{n=k}^\infty |a_n| < \infty$.

משפט 1: (מבחן ההתכנסות בהחלט)

יהי $0 \le k \in \mathbb{Z}$ ותהי $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ סדרה של מס' ממשיים

נניח שהטור $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט. אזי

הטור מתכנס.

<u>הוכחה:</u> נב"ל בסדרה $(b_n)_{n=k}^{\infty}$ המוגדרת

ע"י $b_n = |a_n| - a_n$ לכל $n \ge k$. נשים

לב שלכל $n \ge k$,

$$0 \le b_n = |a_n| - a_n \le 2|a_n|$$

$x \le |x|$ $\qquad$ $-x \le |x|$

לכן מהמבחן ההשוואה,

$$\sum_{n=k}^{\infty} b_n \le \sum_{n=k}^{\infty} 2|a_n| = 2\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| < \infty$$

ולכן $\sum_{n=k}^{\infty} b_n < \infty$. נשים לב כי

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \sum_{n=k}^{\infty} (|a_n| - b_n) = \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=k}^{\infty} b_n = \text{מתכנס} - \text{מתכנס} = \text{מתכנס}$$

$b_n = |a_n| - a_n$ $\qquad$ אלגברה

דוגמא: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^{1.5}}$ מתכנס

בהחלט כי

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{n^{1.5}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.5}} < \infty$$

1.5 הרמוני

הגדרה: יהי $0 \leq k \in \mathbb{Z}$ ויהי $(a_n)_{n=k}^{\infty}$

סדרה של מס' ממשיים. נאמר שהטור

$\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי אם $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ מתכנס

אבל $\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| = \infty$ המתכנס אבל לא בהחלט)

הגדרה: יהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מס'

ממשיים. נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$

הנ"ל טור **פיבונאצ'י** אם

(i) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ יורדת.

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

משפט ב: (מבחן לייבניץ) יהי $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ טור לייבניץ. אז הוא מתכנס לערך $S\in\mathbb{R}$ ובנוסף, $a_1-a_2\leq S\leq a_1$.

דוגמה 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n = a_1-a_2+a_3-a_4+\dots$$

<u>לדוגמא:</u> הטור ההרמוני המתחלף:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots$$

במקרה זה, $a_n=\frac{1}{n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$ הוא סדרה יורדת השואפת ל-0 ולכן זהו טור לייבניץ. לכן הוא מתכנס. הטור לא מתכנס בהחלט כי הטור ההרמוני מתבדר,

ולכן הוא מתכנס בתנאי.

	מתכנס	מתכנס בהחלט
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$	✓	✗
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$	✓	✓
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$	✓	✗

<u>הוכחת משפט ב</u>: נב"ל בספרית הסכומים החלקיים $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ של הטור, כאומר הסדרה $S_N = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} a_n$ לכל $N \geq 1$.

נרצה להוכיח כי $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול s ובנוסף $a_1 - a_2 \leq s \leq a_1$. נב"ל ב- $(S_{2N})_{N=1}^{\infty}$

נשים ב שלכל $N\geq 1$,

$$S_{2N}=\sum_{n=1}^{2N}(-1)^{n+1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\dots+a_{2N-1}-a_{2N}$$

לכן לכל $N\geq 1$,

$$S_{2(N+1)}-S_{2N}=S_{2N+2}-S_{2N}\underset{\text{הגדרת הסדרה}}{=}a_{2N+1}-a_{2N+2}\underset{(a_n)\text{ יורדת}}{\geq}0$$

לכן $S_{2N}\leq S_{2(N+1)}$ לכל $N\geq 1$ ולכן $(S_{2N})_{N=1}^{\infty}$ עולה. עתה נוכיח כי $(S_{2N})_{N=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל.

נשים ב שלכל $N\geq 1$,

$$S_{2N}=\sum_{n=1}^{2N}(-1)^{n+1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\dots+a_{2N-1}-a_{2N}$$

$$=a_1-(a_2-a_3)-\dots-(a_{2N-2}-a_{2N-1})-a_{2N}$$

$$\leq a_1-a_{2N}\overset{(*)}{\leq}a_1$$

(*) מהיות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ יורדת הרי ש-

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ מהיות $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n\geq 1\}$.

הרי ש- $\inf\{a_n : n\geq 1\} = 0$. לכן $a_{2N} \geq 0$

חסם מלרע

לכל $N \geq 1$.

לכן $(S_{2N})_{N=1}^{\infty}$ עולה וחסומה מלעיל ע"י a_1,

ולכן קיים $S\in\mathbb{R}$ כך ש-

$$a_1 - a_2 = S_2 \leq S = \lim_{N\to\infty} S_{2N} = \sup\{S_{2N} : N\geq 1\} \leq a_1$$

חסם מלעיל

מינימליות

ולכן $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$.

עתה נוכיח כי $(S_{2N-1})_{N=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-S.

שים ♡ כי

$$\lim_{N\to\infty} S_{2N-1} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{2N-1} (-1)^{n+1} a_n$$

$$= \lim_{N\to\infty} \Big[\underbrace{\sum_{n=1}^{2N} (-1)^{n+1} a_n}_{S_{2N}} - (-1)^{2N+1} a_{2N} \Big] = \lim_{N\to\infty} (S_{2N} + a_{2N})$$

(**)

$$= S + 0 = S$$

(**)

$$\lim_{N\to\infty} a_{2N} = \lim_{N\to\infty} a_N = 0$$

ירושה

אבל $(S_{2N})_{N=1}^{\infty}$ ו- $(S_{2N-1})_{N=1}^{\infty}$ שתיהן מתכנסות

ל- S, ולכן $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- S,

כלומר

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = S$$ ולכן כי

$$a_1 - a_2 \le S \le a_1$$

הגדרה: יהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$! $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ שתי

סדרות של מס' ממשיים. נאמר שהטור

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ התקבל מהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ע"י

השמת סעיפים אם קיימת סדרה עולה

ממש של מס' טבעיים $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ כך ש-

$n_1 = 1$ (i)

$, k \geq 1$ & (ii)

$$b_k = a_{n_k} + a_{n_k+1} + a_{n_k+2} + \dots + a_{n_{k+1}-1}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \dots$$

$$(a_1 + a_2) + (a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8 + \dots$$

b_1 b_2 b_3 b_4

$n_1 = 1$ $n_2 = 3$ $n_3 = 4$ $n_4 = 7$

$$b_3 = a_4 + a_5 + a_6 = a_{n_3} + a_{n_3+1} + a_{n_4-1}$$

משפט ב: (מבחן הסנדוויץ')

יהיו $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ שתי סדרות של מס' ממשיים. נניח שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ התכנס

מהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ע"י השמת סנדוויץ'. נניח

בנוסף שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס במובן הרחב.

אזי גם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס במובן הרחב,

ובנוסף

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

תרגיל 1: קבעו האם הטור הבא

מתכנס או מתבדר:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}+\dots$$

פתרון: נניח בשלילה שהטור מתכנס. אזי

קיים $S\in\mathbb{R}$ כך ש-

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \dots$$

אבל ממבחן הסדרים:

$$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

צנח שם הרמוני

סתירה!